

MODELAGEM FÍSICO-MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE PRÉ-VÁCUO COMPLEXOS

DEGASPERI, F. T.

Faculdade de Tecnologia de São Paulo - FATEC-SP - CEETEPS

**ftd@fatecsp.br - francisco.degasper@fatec.sp.gov.br*

Physical-Mathematical Modeling of Complex-Vacuum Systems

Eixo Tecnológico: Controle e Processos Industriais.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar detalhadamente e de forma rigorosa a dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – EPBV para o caso de sistemas de vácuo complexo. Está sendo considerado sistema de vácuo complexo aquele que apresenta configuração com duas ou mais câmaras de vácuo interligadas entre si e sendo bombeadas por meio de uma ou mais bombas de vácuo. Do ponto de vista matemático, a equação diferencial, que representa a evolução temporal da pressão em uma dada câmara de vácuo, depende da pressão de outra ou outras câmaras de vácuo. Neste caso, matematicamente tem-se um sistema de equações diferenciais acopladas, e, dependendo do regime de transporte de gás, tem-se um sistema de equações diferenciais não linear. Neste trabalho é apresentado o sistema de equação diferencial acoplado para o caso de duas câmaras de vácuo ligadas entre si por meio de uma condutância e sendo as duas câmaras de vácuo bombeadas por uma bomba de vácuo. Cabe mencionar que o problema matemático deverá ser solucionado com a intervenção de procedimentos numérico-computacionais, uma vez que a solução dos problemas matemáticos, quase que na sua totalidade, nos casos de interesse na tecnologia, na indústria e na ciência, não são alcançadas por meio de solução analítica.

Palavras-chave: *Modelagem, Vácuo, Gás rarefeito, Bombeamento de gás, Transporte de gás.*

Abstract

The objective of this work is to present in detail and rigorously the deduction of the Fundamental Equation for the Vacuum Pumping Process - EPBV for the case of complex vacuum systems. A complex vacuum system is considered to be one that has a configuration with two or more vacuum chambers interconnected and being pumped through one or more vacuum pumps. From a mathematical point of view, the differential equation, which represents the time evolution of pressure in a given vacuum chamber, depends on the pressure of another or other vacuum chambers. In this case, mathematically we have a system of coupled differential equations, e.g. depending on the gas transport regime, we have a system of nonlinear differential equations. In this work, the coupled differential equation system is presented for the case of two vacuum chambers connected by means of a conductance and the two vacuum chambers being pumped by a vacuum pump. It is worth mentioning that the mathematical problem must be solved with the intervention of numerical-computational procedures, since the solution of mathematical problems, almost in its entirety, in cases of interest in technology, industry and science, is not achieved by means of analytical solution.

Keywords: *Modeling, Vacuum, Rarefied gas, Gas pumping, Gas transport.*

1. Introdução

A tecnologia do vácuo é utilizada em muitas etapas de fabricação e transformação de diversos produtos e também é utilizada intensamente na pesquisa tanto básica como aplicada. Os sistemas de vácuo têm inúmeras formas e dimensões decorrentes das diferentes tarefas e quantidades de gases presentes nos processos realizados à baixa pressão. Há também processos, que mesmo ocorrendo em pressão atmosférica, ou ainda em altas pressões, utilizam a tecnologia do vácuo. Nestes casos, realizamos a remoção dos gases, e em seguida, introduzimos gases ou vapores de processo ou para armazenamento. A diversificação dos sistemas de vácuo faz com

Anais da VII Mostra de Docentes em RJI

que seus cálculos e projetos sejam geralmente distintos entre si e temos que na maior parte deles de difícil execução, particularmente quando os detalhes inerentes a cada caso devem ser observados e levados em consideração. Do ponto de vista prático, para uma escolha adequada da instrumentação utilizada nas instalações de sistemas de vácuo, é fundamental uma compreensão dos conceitos básicos envolvidos no processo de bombeamento de gases e vapores em baixa pressão. Desta forma, o modelo físico-matemático a ser construído deve representar adequada e suficientemente o processo em estudo e análise.

Assim, a identificação dos detalhes e das particularidades do sistema de vácuo assume uma importância fundamental, uma vez que eles influenciarão e, em muitos casos, determinarão objetivamente a escolha adequada dos equipamentos da instalação sendo projetada. Geralmente os equipamentos e instrumentos utilizados nos sistemas de vácuo são caros. Somente este último fato, acreditamos, justifica a elaboração de um estudo aprofundado do processo a ser realizado, com a construção de modelos, cálculos e análises, com o propósito de escolher adequadamente a instrumentação e os equipamentos.

Cabe mencionar que ocorrem com os projetos de sistemas de vácuo, mesmos os de grande porte fabricados por empresas conceituadas, a especificação inadequada de alguns de seus instrumentos e equipamentos. Nestes casos constatamos, via de regra, que não houve um estudo suficientemente aprofundado do processo a ser realizado em vácuo. Em geral, simplificações exageradas foram o motivo principal, afastando demasiadamente a modelagem da realidade física. Ilustrando uma situação como comum em tecnologia do vácuo: como decorrência de um erro de projeto, pode-se ter o caso da especificação de bombas de vácuo insuficientes para que se possa atingir uma pressão previamente requerida.

Neste caso pode-se corrigir este erro de projeto aumentando a velocidade de bombeamento, fazendo, por exemplo, a instalação suplementar de uma ou mais bombas de vácuo. Situações como estas trazem um aumento dos custos e podem diminuir substancialmente a remuneração das empresas fabricantes, e ainda, quase certamente atrasam a instalação e a operação completa do equipamento.

Sob o ponto de vista estritamente da natureza física do vácuo é importante mencionar que a remoção total das moléculas dos gases e vapores presentes em um recipiente é uma tarefa impossível. Este fato, antes de ser uma limitação devido às questões práticas, é uma limitação de princípio físico. Assim, por mais que se retirem moléculas do gás da câmara de vácuo, ainda sempre tem-se inúmeras moléculas no volume devido às questões físicas inerentes à natureza.

Desta forma, um estudo detalhado do sistema de vácuo se faz necessário, a fim de alcançar resultados que justifique o investimento feito para a construção do sistema de vácuo. Este trabalho tem por objetivo alcançar uma modelagem físico-matemática capaz de aprofundar a análise dos sistemas de vácuo.

2. Materiais e métodos

2.1. Materiais

Na essência, os sistemas de vácuo são produzidos a fim de se produzir uma pressão menor que a pressão atmosférica local. Pode-se ter ainda, situações em que o vácuo é necessário para a remoção de parte do gás presente em um recipiente, e, em seguida é introduzido uma quantidade de um certo gás de processo. Em ambas as situações, para se ter um procedimento devidamente tratado do ponto de vista tecnológico, isto é, com forte intervenção da ciência, se faz necessária uma modelagem físico-matemática do sistema de vácuo. Grosso modo, os sistemas de vácuo têm a tarefa de reduzir a pressão na câmara de vácuo. Desta forma, um estudo detalhado do comportamento da matéria no estado gasoso se faz necessário. Como ponto de

Anais da VII Mostra de Docentes em RJJ

partida tem-se a equação dos gases perfeitos ou ideais, chamada de equação de *Clapeyron-Mendeleev*, é dada pela Equação 1,

$$p V = n R T \quad (1)$$

ou ainda,

$$p V = N k T,$$

onde p é a pressão, V é o volume disponível para as moléculas no recipiente – neste caso a câmara de vácuo –, n é o número de mols, R é a constante dos gases perfeitos, T é a temperatura absoluta, N é o número de moléculas e k é a constante de Boltzmann. Como exemplo de aplicação direta da equação de *Clapeyron-Mendeleev* citamos o método da expansão estática, usado extensamente na metrologia em vácuo, cuja base física está sustentada na lei de *Boyle-Mariotte*. Assim, apesar da sua grande simplicidade, a equação dos gases ideais ou perfeitos é bastante bem aplicável à tecnologia do vácuo [1, 2].

Partindo da equação dos gases perfeitos, vamos derivar em relação ao tempo ambos os membros da equação *Clapeyron-Mendeleev*, ficamos com a Equação 2,

$$p V = N k T \Rightarrow \frac{d}{dt}(p V) = \frac{d}{dt}(N k T) \Rightarrow p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} = k T \frac{dN}{dt} + k N \frac{dT}{dt} \quad (2)$$

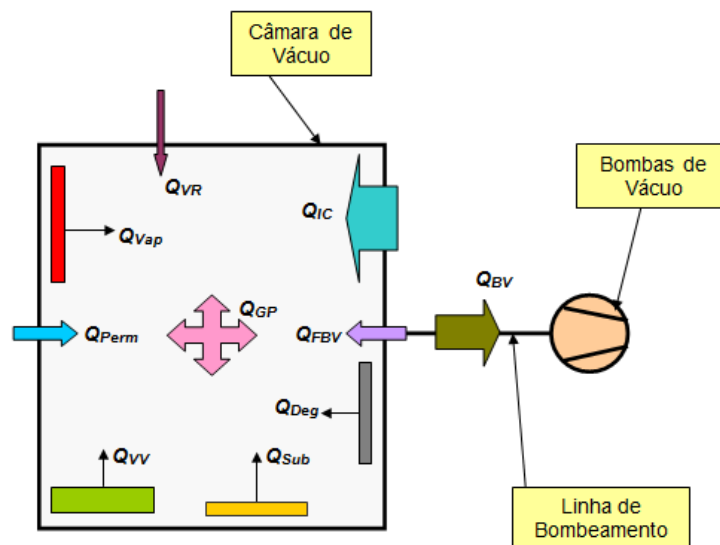
Para a maior parte dos sistemas de vácuo, geralmente, a temperatura T e o volume V da câmara de vácuo são mantidos constantes, assim, a equação acima se reduz a Eq. (3)

$$V \frac{dp}{dt} = k T \frac{dN}{dt}$$

ou, $V \frac{dp}{dt} = R T \frac{dn}{dt} \quad (3)$

A Figura 1 representa esquematicamente um sistema de vácuo mostrado as três partes importantes: a câmara de vácuo - onde se realiza o processo em vácuo -, a linha de bombeamento - onde os gases sofrem o transporte -, e a bomba de vácuo - responsável pela captação dos gases.

Fig. 1 - Esquema de um sistema de vácuo mostrando as possíveis fontes de gases e vapores que alimentam a câmara de vácuo, com a linha de bombeamento e a bomba de vácuo.



Anais da VII Mostra de Docentes em RJJ

Por meio da Equação 3 é possível expressar a variação da pressão na câmara de vácuo em função do tempo. A modelagem é sempre uma tentativa de descrição da natureza, e no caso dos sistemas de vácuo, para alcançar uma modelagem realizada em detalhe, isto é, uma muito boa aderência entre os valores obtidos experimentalmente daqueles obtidos por meio da solução matemática construída na modelagem. Assim, considerando o desmembramento entre a quantidade de gás - em termos de taxa de transferência de gás - devido às fontes de gás e aquela quantidade devido ao efeito do bombeamento da bomba de vácuo, tem-se a Equação 4,

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -Q_{BV} + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow \quad (4)$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i.$$

A velocidade efetiva de bombeamento - velocidade de bombeamento que efetivamente bombeia a câmara de vácuo é dada pela Equação 5,

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} \quad (5)$$

sendo que S_{bv} é a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo, C_{Total} é a condutância total da linha de bombeamento e S_{ef} é a velocidade efetiva de bombeamento. Tem-se a equação diferencial que rege a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo [3, 4], conforme mostrada na Equação 6,

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = - S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i.$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = - \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (6)$$

$$p_{CV}(t=0) = p_0$$

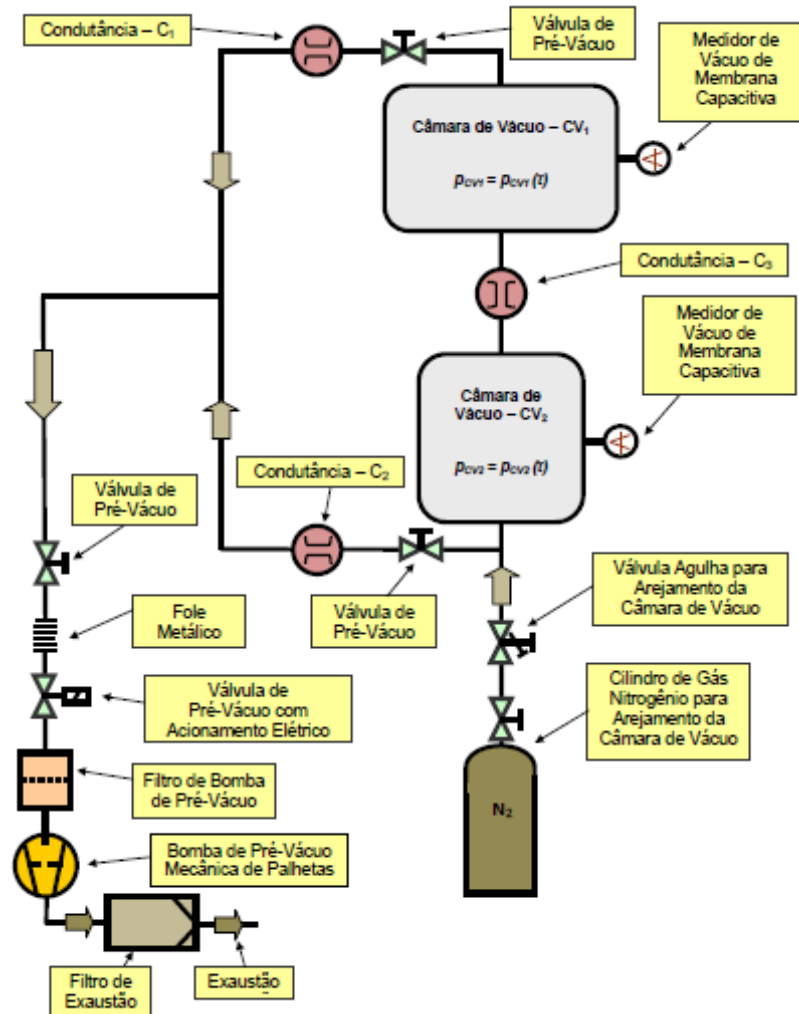
Aplicando a equação diferencial obtida no sistema de vácuo mostrado na Figura 2 pode-se encontrar o sistema de equações diferenciais ordinárias para poder encontrar a solução matemática do problema, conforme a Equação 7. A obtenção da equação diferencial que representa o processo de bombeamento de um sistema de vácuo em particular, em geral, não apresenta solução matemática de fácil obtenção.

Dependendo de como é a curva da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo instalada, ou das curvas das bombas de vácuo instaladas - podemos ter bombas de vácuo instaladas na câmara de vácuo com velocidade de bombeamento específica para cada bomba de vácuo. Mais, dependendo do regime de transporte de gás, as condutâncias, dos tubos e conexões que fazem parte do processo de bombeamento, são dependentes da pressão. Com isso, o problema matemático, que é a determinação da solução da equação diferencial torna-se bastante difícil. Felizmente pode-se lançar mão de poderosos programas computacionais, baseados em métodos numéricos muito bem desenvolvidos e confiáveis, para alcançar a solução do problema físico-matemático.

Anais da VII Mostra de Docentes em RJJ

Para poder representar bastante bem, isto é, bem perto da realidade física do problema de transporte de gás em sistemas de vácuo, os modelos físico-matemáticos devem ser suficientemente complexos, acarretando problemas matemáticos também complexos.

Fig. 2 - Esquema de um sistema de vácuo complexo, considerando a condutância da linha de bombeamento entre a câmara de vácuo e a bomba de vácuo.



Neste sistema de equações diferenciais pode-se ver que a solução de uma das equações diferenciais depende da outra, desta forma, elas estão acopladas, como pode-se ver no conjunto da Equação 7,

$$V_{CV1} \frac{d}{dt} p_{CV1}(t) = -S_{ef1} \cdot p_{CV1}(t) + C_3 \cdot [p_{CV2}(t) - p_{CV1}(t)] + \sum_{i=1}^n Q1_i$$

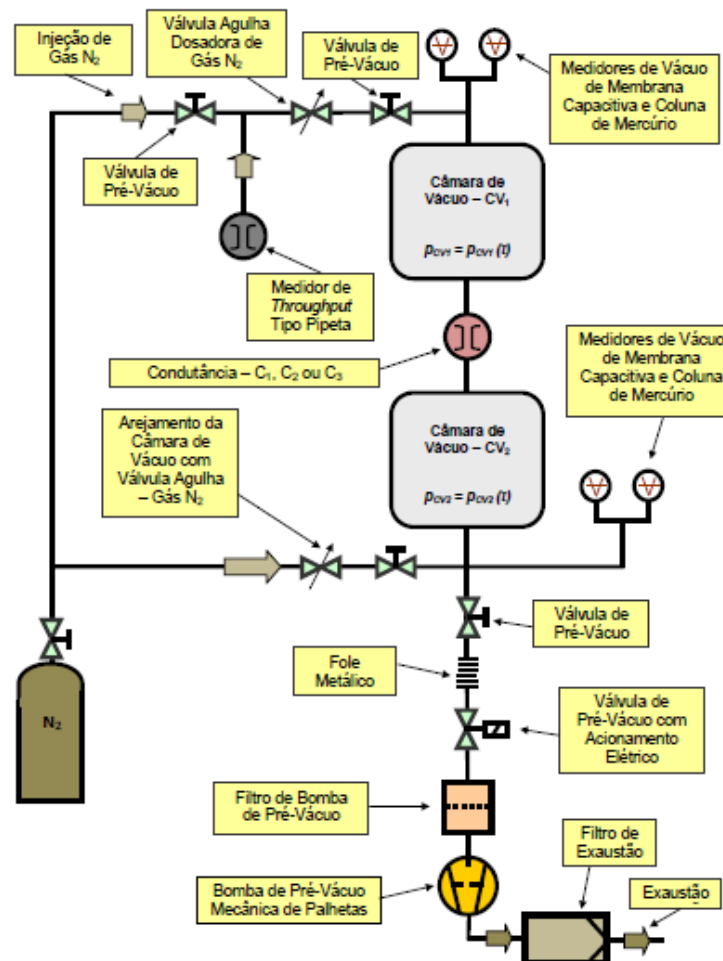
$$V_{CV2} \frac{d}{dt} p_{CV2}(t) = -S_{ef2} \cdot p_{CV2}(t) + C_3 \cdot [p_{CV1}(t) - p_{CV2}(t)] + \sum_{i=1}^n Q2_i \quad (7)$$

A solução deste sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas e nas situações de interesse tecnológico e científico fortemente não linear, exige a intervenção de métodos numéricos para encontrar a solução do problema matemático. Encontrar a solução do problema matemático significa determinar como variam as pressões nas duas câmaras de vácuo em

Anais da VII Mostra de Docentes em RJI

função do tempo. No regime de transporte viscoso laminar e o regime de transporte de gás intermediário (também chamado de regime de transporte de gás de Knudsen) - considerando os sistemas de pré- vácuo - as condutâncias das linhas de bombeamento, assim como, a condutância entre as duas câmaras de vácuo (a condutância que conecta as duas câmaras de vácuo) são fortemente dependentes da pressão. Com isso, o problema matemático torna-se difícil de obter as pressões nas câmaras de vácuo em função do tempo.

Fig. 3 - Esquema de um sistema de vácuo com possibilidades de formas bombeamento.



Por meio de uma modelagem construída a partir das equações diferenciais ordinárias expostas neste trabalho é analisar com detalhe suficiente muitos sistemas de vácuo, porém há situações cuja modelagem exige a consideração de o valor da pressão poder variar apreciavelmente na câmara de vácuo, desta forma, a modelagem considerando a obtenção do campo de pressão se faz necessária [6, 7].

3. Resultados e Discussão

Sistemas de vácuo podem ser modelados em geral com o uso das equações diferenciais apresentadas neste trabalho. Certamente, a qualidade da modelagem de um particular sistema de vácuo. Pode-se ver que foi equacionada uma situação de um sistema de vácuo que encontra aplicação na indústria de refrigeração e ar-condicionado e também, pode ser empregada no estudo do processo de bombeamento de ar nos freios dos automóveis. Devido a complexidade

Anais da VII Mostra de Docentes em RJI

matemática do problema, deve-se lançar mão de recursos numéricos computacionais, a fim de se obter a solução matemática do problema.

4. Conclusões

Pode-se ver que foi equacionada uma situação de um sistema de vácuo que encontra aplicação na indústria de refrigeração e ar-condicionado e também, pode ser empregada no estudo do processo de bombeamento de ar nos freios dos automóveis. Devido a complexidade matemática do problema, deve-se lançar mão de recursos numéricos computacionais, a fim de se obter a solução matemática do problema.

Agradecimentos

Ao CEETEPS não impedindo que este docente, iniciando suas atividades integrais em JTI e posteriormente em RJI possa realizar trabalhos externos ao CEETEPS e captar recursos financeiros para o desenvolvimento de projetos de pesquisa. Tornando assim o Laboratório de Tecnologia do Vácuo - LTV da FATEC-SP bastante bem equipado. Este docente em RJI acredita que esta seja uma missão típica do tipo de instituição que é o CEETEPS. Ainda, este docente acredita que não há dicotomia entre as atividades puramente acadêmicas e aquelas voltadas diretamente à solução de problemas industriais. Muito pelo contrário, são perfeitamente complementares e fazem parte do dia a dia dos países desenvolvidos. Neste sentido o CEETEPS deve buscar formas mais diretas e menos burocráticas para a interação CEETEPS e o setor produtivo. Neste sentido, este docente tem encontrado total apoio da Diretoria da FATEC-SP e do Departamento de Sistemas Eletrônicos - DSE. Este docente quer também deixar registrado que acredita que tem está ocorrendo um progresso muito grande nas atividades de pesquisa no CEETEPS no sentido de estar ocorrendo muitos trabalhos com vários docentes tanto internos como externos ao CEETEPS. Como crítica ao CEETEPS - entre as muitas que tenho para fazer, porém faço somente duas: uma referente ao fato de ter perdido uma vaga de Auxiliar de Docente e outra referente a perda de 2 duas vagas de estagiários, e nunca ter recebido uma explicação por parte da direção do CEETEPS. Todos os trabalhos são intermediados e realizados pela Fundação de Apoio à Tecnologia - FAT.

Agradecimentos ao CNPq pelo constante apoio por meio da concessão de Bolsas Pibic e Pibiti-EM.

Referências

[1] JOUSTEN, K. (Editor). **Handbook of Vacuum Technology**. Second Edition, Karl Jousten (Editor). Wiley ICH-2016.

[2] DEGASPERI, F. T., **Dissertação de Mestrado** - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP - 2002. Campinas. São Paulo. Brasil.

[3] DEGASPERI, F. T., **Tese de Doutorado** - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP - 2006. Campinas. São Paulo. Brasil.

[4] ARFKEN, G., WEBER, H. J., HARRIS, F. E. **Mathematical Methods for Physicists**. 7th Edition. Elsevier-Academic Press. 2013.

[5] GILAT, A., SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Bookman.2008. São Paulo.

Anais da VII Mostra de Docentes em RJI

[6] SOUSA, G. G. J., **Análise, modelagem e medição de sistemas complexos de pré-vácuo bombeados no regime viscoso laminar de escoamento**. TCC - Trabalho de Conclusão de Curso. Orientador: Degasperi, F.T. Laboratório de Tecnologia do Vácuo – LTV. Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP - CEETEPS. 2016.

[7] DEGASPERI, F. T.; RICOTTA, R. M., Pressure field and its gradient in electron microscopes. **Vacuum** - 2021. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2021.110162>